Penyelesaian Persamaan Diferensial Bernoulli Tak Linear dengan Metode Transformasi Diferensial

Rahmiani Jalil [a], Muhammad Abdy [b], dan Wahidah Sanusi [c]

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Makassar

[a] rahmiani_alhaura@yahoo.com
[b] abdy02@yahoo.com
[c] wahidah.sanusi@unm.ac.id

Abstrak. *Persamaan diferensial Bernoulli merupakan persamaan diferensial biasa orde satu yang memiliki bentuk umum* $\frac{dy}{dx} + A(x) = B(x)y^n$ *yang dapat berbentuk persamaan diferensial linear atau tak linear. Jika* $n = 0$ *atau* $n = 1$ *maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial Bernoulli linear, dan jika* $n \neq 0$ *atau* $n \neq 1$ *maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial Bernoulli tak linear. Penelitian ini bertujuan untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial Bernoulli tak linear dengan menggunakan metode transformasi diferensial. Metode transformasi diferensial merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak linear. Metode ini dapat digunakan tanpa linearisasi terlebih dahulu. Penyelesaian dengan metode ini dilakukan dengan mentransformasi persamaan diferensial Bernoulli tak linear menggunakan sifat-sifat transformasi diferensial yang sesuai. Solusi yang diperoleh berupa deret tak hingga sehingga perlu dipotong sampai sejumlah N suku tertentu. Dalam penelitian ini, penulis memperoleh hasil yang sama dalam mencari solusi persamaan diferensial Bernoulli tak linear dengan cara manual dan dengan menggunakan Maple 18.*
Kata Kunci: *persamaan diferensial Bernoulli, metode transformasi diferensial*

Abstract. *Bernoulli differential equations are ordinary first-order differential equations that have a common form:* $\frac{dy}{dx} + A\,(x)y = B(x)y^n$ *which can be linear or nonlinear differential equations. If* $n = 0$ *or* $n = 1$ *then the equation is a linear Bernoulli equation, and if* $n \neq 0$ *or* $n \neq$ ` *then the equation is a nonlinear Bernoulli differential equation. This study aims to find the solution of the nonlinear Bernoulli differential equations by using the differential transformation method. The method of differential transformation is one method to solve nonlinear differential equations. This method can be used without any prior linearization. The solution by this method is performed by transforming the non-linear Bernoulli differential equation using the appropriate differential transformation properties. The solution obtained is an infinite series so it needs to be cut up to a certain number of N tribes. In this study, the outhors obtained the same result by solving a nonlinear Bernoulli differential equations manually and using software Maple 18.*
Keywords: *Bernoulli differential equation, differential transformation method*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel-variabel bebas (*independent variables*). Secara umum persamaan diferensial dibagi menjadi dua bagian yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa hanya mengandung satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial mengandung lebih dari satu variabel bebas. (Rochmad, 2014)

Persamaan diferensial Bernoulli adalah salah satu bentuk dari persamaan diferensial biasa orde satu yang memiliki bentuk umum:

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y = B(x)y^n \tag{1}$$

dengan A, B merupakan suatu fungsi dari x atau konstanta dan n adalah bilangan *real*. (Rochmaini dkk., 2014)

Metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial secara analitik adalah metode transformasi. Transformasi adalah formula matematis yang digunakan untuk mengubah persamaan matematika dari suatu bentuk ke bentuk yang lain. Transformasi diperlukan sebagai alat bantu untuk memecahkan persoalan matematika yang rumit. Banyak persoalan matematika maupun teknik yang dapat diselesaikan dengan menggunakan transformasi seperti transformasi Laplace, transformasi Fourier, transformsi diferensial, transformsi Henkel, transformsi Mellin, dan transformasi Z. (Minarti, 2015)

Metode transformasi diferensial merupakan suatu langkah iteratif untuk memperoleh solusi analitik deret Taylor dari persamaan diferensial. Transormasi diferensial diperkenalkan pertama kali oleh Zhou pada tahun 1986 untuk menyelesaikan permasalahn nilai awal yang linear dan tak linear pada analisis sirkuit listrik. Berbagai penelitian diketahui telah menggunakan metode ini, diantaranya oleh Rahayu dkk. (2012) yang membahas penyelesaian utuk permasalahan diferensial Riccati orde satu dan ore dua. Dewi (2013) menggunakan metode iniuntuk menyelesaikan model epidemi SIRS. Sutriani (2015) menggunakan metode ini ntuk menyelesaikan persamaan Lotka-Volterra.

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan persamaan diferensial Bernoulli tak linear menggunakan metode transformasi diferensial. Masalah yang dibahas pada penelitian ini dibatasi pada $n = 2$ hingga $n = 4$.

KAJIAN PUSTAKA

1. Metode Transformasi Diferensial

Definisi dasar dari transformasi diferensial untuk suatu fungsi yang analitik pada domain D yaitu fungsi yang mempunyai turunan pada setiap titik di persekitaran domain D yang dinyatakan sebagai berikut.

$$U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}, k = 0,1,2,3, \dots \tag{2}$$

dengan $u(x)$ merupakan fungsi asli dan $U(k)$ merupakan fungsi transformasi. (Atternejad dan Shaba, 2008)

Suatu fungsi u di x dapat dinyatakan dalam bentuk deret Taylor, yaitu

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} (x - x_0)^k \tag{3}$$

Berdasarkan persamaan (2), maka persamaaan (3) menjadi

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x - x_0)^k \tag{4}$$

yang disebut sebagai invers transformasi diferensial. Dari persamaan (3) dapat dikatakan bahwa konsep dari transformasi diferensial diturunkan dari deret Taylor. (Hasan dan Erturk, 2007)

2. Sifat-Sifat Transformasi Diferensial

Misalkan $U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]$, $F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]$, dan $G(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right]$ merupakan masing-masing fungsi transformasi dari $u(x)$, $f(x)$, dan $g(x)$, maka berdasarkan persamaan (2) dan (4) dapat ditentukan sifat-sifat operasi dari transformasi diferensial, yaitu sebagai berikut.

Sifat 1. Penjumlahan dan Pengurangan (Rahayu dkk., 2012)
Jika $u(x) = f(x) \pm g(x)$, maka $U(k) = F(k) \pm G(k)$.
Sifat 2. Perkalian dengan Konstanta (Rahayu dkk., 2012)
Jika $u(x) = \lambda g(x)$, maka $U(k) = \lambda G(k)$, untuk λ = konstanta.
Sifat 3. Turunan Pertama (Rahayu dkk., 2012)
Jika $u(x) = \frac{dg(x)}{dx}$, maka $U(k) = (k+1)Y(k+1)$.
Sifat 4. Turunan Ke-m (Rahayu dkk., 2012)
jika $u(x) = \frac{d^k g(x)}{dx^m}$, maka $U(k) = (k+1)\dots(k+m)Y(k+m)$.
Sifat 5. Perkalian (Rahayu dkk., 2012)
Jika $u(x) = f(x)g(x)$, maka $U(k) = \sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)$
Sifat 6. Perkalian m fungsi (Rahayu dkk., 2012)
Jika $u(x) = f_1(x)f_2(x)\dots f_m(x)$, maka $U(k) = \sum_{k_{m-1}=0}^{k} \dots \sum_{k_1=0}^{k_2} F_1(k_1)F_2(k_2 - k_1)\dots F_m(k - k_{m-1})$
Sifat 7. Fungsi Variabel Bebas (Rahayu dkk., 2012)
Jika $u(x) = x^m$, maka $U(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, k-m=0 \\ 0, k-m \neq 0 \end{cases}$.
Sifat 8. Fungsi Konstanta (Rahayu dkk., 2012)
Jika $u(x) = s, s \in R$, maka $U(k) = \delta(k) = \begin{cases} s, k=0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$.
Sifat 9. Fungsi Eksponensial (Mirzaee, 2011)
Jika $u(x) = e^{\lambda x}$, maka $U(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$, dimana λ adalah konstanta.
Sifat 10. Fungsi Sinus (Mirzaee, 2011)
Jika $u(x) = \sin(\omega x + \alpha)$, maka $U(k) = \frac{\omega^k}{k!}\sin(\frac{k\pi}{2} + \alpha)$, dimana ω dan α adalah konstanta.
Sifat 11. Fungsi Cosinus (Mirzaee, 2011)
Jika $u(x) = cos(\omega x + \alpha)$, maka $U(k) = \frac{\omega^k}{k!}\cos(\frac{k\pi}{2} + \alpha)$, dimana ω dan α adalah konstanta.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kajian teori mengenai penyelesaian persamaan diferensial Bernoulli tak linear dengan metode transformasi diferensial. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Materi yang digunakan diambil dari beberapa buu dan jurnal yang membahas tentang persamaan diferensial, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial Bernoulli dan transformasi diferensial.

Prosedur penelitian yang dilakukan pada penelitian ini yaitu:

1. Persamaan diferensial Bernoulli tak linear ditransformasi menggunakan sifat transformasi diferensial yang sesuai.
2. Nilai awal yang diberikan ditransformasi menggunakan definisi transformasi diferensial.
3. Dipilih k suatu bilangan bulat tak negatif ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$), bilangan bulat tersebut disubstitusikan pada persamaan hasil transformasi persamaan Bernoulli tak linear.
4. Nilai-nilai yang diperoleh disubstitusi pada invers dari metode transformasi diferensial yang menghasilkan penyelesaian dari permasalahan tersebut.
5. Memperlihatkan hasil penyelesaian persamaan diferensial Bernoulli tak linear secara numerik menggunakan Maple 18.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Penyelesaian Persmaan Diferensial Bernoulli Tak linear dengan Metode Transformasi Diferensial

Perhatikan persamaan diferensial bernoulli tak linear ($n = 2$) berikut ini

$$\frac{dy}{dx} - y \cos x + y^2 \cos x = 0 \tag{5}$$

dengan nlai awal $y(0) = 1$

Berdasarkan sifat transformasi diferensial diperoleh

$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left[\frac{1}{k!}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) Y(k) + \sum_{r=0}^{k} \frac{1^r}{r!}\cos\left(\frac{r\pi}{2}\right) Y(k-r)\right] \tag{6}$$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh transformasi nilai awal yaitu $Y(0) = 1$. Selanjutnya, substitusi nilai $k = 0,1,2, ...$ pada persamaan (6) menghasilkan nilai-nilai berikut.

$$Y(1) = 0, Y(2) = 0, Y(3) = \frac{1}{6}, ...$$

Berdasarkan persamaan (4) diperoleh solusi persamaan diferensial Bernoulli tak linear dari persamaan (5) yaitu

$$y(t) = 1 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots$$

Perhatikan persamaan diferensial bernoulli tak linear ($n = 3$) berikut ini

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2 y^3 \tag{7}$$

dengan nlai awal $y(0) = 2$

Berdasarkan sifat transformasi diferensial diperoleh

$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left[-3\delta(k-2)Y(k) + \sum_{a=0}^{k}\sum_{b=0}^{a} \delta(b-2)Y(a-b)Y(k-a)\right] \tag{8}$$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh transformasi nilai awal yaitu $Y(0) = 2$. Selanjutnya, substitusi nilai $k = 0,1,2, ...$ pada persamaan (8) menghasilkan nilai-nilai berikut.

$$Y(1) = 0, Y(2) = 0, Y(3) = \frac{4}{3}, ...$$

Berdasarkan persamaan (4) diperoleh solusi persamaan diferensial Bernoulli tak linear dari persamaan (7) yaitu

$$y(t) = 2 + \frac{4}{3}t^3 + \cdots$$

Perhatikan persamaan diferensial bernoulli tak linear ($n = 4$) berikut ini

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = e^x y^4 \tag{9}$$

dengan nlai awal $y(0) = 4$

Berdasarkan sifat transformasi diferensial diperoleh

$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left[-\frac{1}{3}Y(k) + \sum_{a=0}^{k}\sum_{b=0}^{a}\sum_{c=0}^{b} \frac{1^c}{c!} Y(b-c)Y(a-b)Y(k-a)\right] \tag{10}$$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh transformasi nilai awal yaitu $Y(0) = 3$. Selanjutnya, substitusi nilai $k = 0,1,2, ...$ pada persamaan (10) menghasilkan nilai-nilai berikut

$$Y(1) = 26, Y(2) = \frac{2161}{6}, Y(3) = \frac{295271}{54}, ...$$

Berdasarkan persamaan (4) diperoleh solusi persamaan diferensial Bernoulli tak linear dari persamaan (9) yaitu

$$y(t) = 3 + 26t + \frac{2161}{6}t^2 + \frac{295271}{54}t^3 + \cdots$$

2. Penyelesaian Persamaan Diferensial Bernoulli Tak Linear dengan Metode Transformasi Diferensial Menggunakan Program Maple 18

Penyelesaian persamaan diferensial Bernoulli tak linear menggunakan metode numerik secara manual membutuhkan waktu yang lama. Selain membutuhkan waktu yang lama, penyelesaian secara manual juga membutuhkan ketelitian agar idak terjadi kesalahan dalam menyelesaikan soal yang diberikan.

Selain memiliki kelemahan, penyelesaian persamaan diferensial Bernoulli tak linear menggunakan metode numerik juga memiliki kelebihan yaitu solsinya selalu dapat diperoleh dengan bantuan program komputer. Salah satu program komputer yang digunakan adalah program Mpale 18.

Solusi dari persamaan (5) dengan derajat ketaklinearan $n = 2$ dan nilai awal $y(0) = 1$ menggunakan Maple 18

TABEL 1. Hasil penyelesaian persamaan (5) menggunakan metode transformasi diferensial

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{Y(k+1)}$
0	0
1	0
2	$\frac{1}{6}$
3	$-\frac{1}{24}$
4	$-\frac{1}{2880}$
5	$\frac{241}{17280}$
6	$-\frac{59383}{12441600}$
7	$-\frac{29177}{99532800}$
8	$\frac{36029456263}{36118462464000}$
9	$-\frac{113341766023}{361184624640000}$
10	$-\frac{617945081518771577}{1441733442482995200000}$

Solusi dari persamaan (7) dengan derajat ketaklinearan $n = 3$ dan nilai awal $y(0) = 2$ menggunakan Maple 18

TABEL 2. Hasil penyelesaian persamaan (7) menggunakan metode transformasi diferensial

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{Y(k+1)}$
0	0
1	0
2	$\frac{4}{3}$

3	0
4	0
5	$\frac{8}{9}$
6	0
7	0
8	$\frac{16}{27}$
9	0
10	0

Solusi dari persamaan (9) dengan derajat ketaklinearan $n = 4$ dan nilai awal $y(0) = 3$ menggunakan Maple 18

TABEL 3. Hasil penyelesaian persamaan (9) menggunakan metode transformasi diferensial

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{Y(k+1)}$
0	26
1	$\frac{2161}{6}$
2	$\frac{295271}{54}$
3	$\frac{14098489}{162}$
4	$\frac{13840199891}{9720}$
5	$\frac{4150392417901}{174960}$
6	$\frac{91919024393846}{229635}$
7	$-\frac{601274435898036037 1}{88179840}$
8	$\frac{2785824573991489883 1}{2380855680}$
9	$\frac{721262220466871615782183}{35712835200}$
10	$\frac{11793658247683060943659343}{336721017600}$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penyelesaia persamaan Bernoulli tak linear menggunakan metode transformasi diferensialdapat disimpulkan:

1. Berdasarkan contoh yang diberikan, persamaan (5) dengan $y(0) = 1$ diperoleh solusi $y(t) = 1 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots$. Untuk persamaan (7) dengan $y(0) = 2$ diperoleh solusi $y(t) = 2 + \frac{4}{3}t^3 + \cdots$. Unuk persamaan (9) dengan $y(0) = 3$ diperoleh solusi $y(t) = 3 + 26t + \frac{2161}{6}t^2 + \frac{295271}{54}t^3 + \cdots$.
2. Solusi yang diperoleh dengan menggunakan Maple 18 untuk persamaan (5) dengan $y(0) = 1$ yaitu $y(t) = 1 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{2880}t^5 + \frac{241}{17280}t^6 - \frac{59383}{12441600}t^7 - \frac{29177}{99532800}t^8 + \cdots$. Untuk persamaan (7) dengan $y(0) = 2$ diperoleh $y(t) = 2 + \frac{4}{3}t^3 +$

$\frac{8}{9}t^6 + \frac{16}{27}t^9 + \cdots$. Untuk persamaan (9) dengan $y(0) = 3$ diperoleh $y(t) = 3 + 26t + \frac{2161}{6}t^2 + \frac{295271}{54}t^3 + \frac{14098489}{162}t^4 + \frac{13840199891}{9720}t^5 + \cdots$.

3. Dalam penelitian ini, penulis memperoleh hasil penyelesaian simulasi secara manual diperoleh hasil yang sama dengan penggunaan software Maple 18.

DAFTAR PUSTAKA

Hasan, I.H.A.H & Erturk, V.S. 2007. *Applying Differential Transformation Method to the One-Dimensional Planar Bratu Problem*. Int. J. Contemp. Math. Sciences. Vol 30(2), 1493-1504.

Minarti, Nova.,Kiftiah, Mariatul., & Helmi. 2015. Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Linear dengan Menggunakan Metode Transformasi Elzaki. *Matematika Statistika Dan Terapannya (Bimaster)*, 04, 227-236.

Mirzaee, Farshid. 2011. Differential Transform Method for Solving Linear and Nonliner System of Ordinary Differential Equation. Applied Mathmatical Science, Vol. 5, 2011, no. 70, 3465-3472.

Rahayu, Sugiatno & Bayu Prihandono. 2012. Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Tak Linear dengan Metode Transformasi Diferensial. Jurnal Bimaster.Vol 01(1), hal 9-14.

Rochmad. 2014. *Bahan Ajar Persamaan Diferensial bagian I*. Universitas Negeri Semarang.http://www.maulana.lecture.ub.ac.id/files/2014/09/persamaandifferensial.pdf.

Rochmaini dkk.. 2014. *Penyelesaian Persamaan Diferensial Bernoulli Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Lima*. Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster), Volume 03, No. 3 (2014), hal. 193-200.